

# L'équation de Dirac sur le cône de lumière Electrons de Majorana et Monopôles magnétiques

GEORGES LOCHAK

Fondation Louis de Broglie 23, rue Marsoulan 75012 - Paris

RESUME. On montre que la condition de Majorana, qui réduit l'équation de Dirac à l'équation dite "abrégée", peut être remplacée par la condition équivalente (et invariante de jauge) que l'**invariant chirale** s'annule, ce qui revient à écrire l'équation de Dirac sur le cône de lumière. Ceci permet une dérivation lagrangienne. On montre que le champ obtenu a deux charges possibles, électrique ou magnétique. Le système se scinde toujours en deux composantes chirales (contrairement au champ de Dirac mais de façon analogue à celui du monopôle). On donne la solution de l'équation d'une telle composante chirale, dans le cas électrique, en présence d'un champ électrique central. Les états sont toujours ionisants. La même étude est plus compliquée dans le cas magnétique, mais elle prouve qu'il s'agit indubitablement d'un monopôle et qu'il est plus stable que l'état "électron".

ABSTRACT. It is shown that the Majorana condition, that reduces the Dirac equation to the "abbreviated" form, may be substituted by the condition that the chiral invariant equals zero, which is equivalent to write the Dirac equation on the null-cone. Owing that, we give a Lagrange derivation. The equation has two states : an "electron" and a "monopole". In both cases the equation splits into two chiral components. In the electric case the equation is solved in a central field : all states are ionizing, independently of the sign of charge. In the magnetic case the equation is more difficult but it is proved that this state is indubitably the one of a massive monopole (contrary to the preceding massless equation precedingly given by the author) and that this state is more stable than the electric one.

## 1. Introduction. Comment le champ de Majorana apparaît dans la théorie du monopôle magnétique.

J'ai proposé une théorie du monopôle magnétique dans le cadre de l'équation de Dirac [1][2][3][4][5][6][7]. Cette théorie est fondée sur la remarque que l'équation de Dirac possède non pas une mais deux jauges locales invariantes (et deux seulement), la première correspondant à une charge électrique et la seconde à une charge magnétique.

La première est la jauge habituelle :

$$\psi \rightarrow e^{\frac{ie}{\hbar c}\phi}\psi, \quad A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu\phi \quad (1.1)$$

qui conserve l'équation de l'électron <sup>1</sup> :

$$\gamma_\mu(\partial_\mu + \frac{ie}{\hbar c}A_\mu)\psi - \frac{m_0c}{\hbar}\psi = 0. \quad (1.2)$$

La seconde est la *jauge chirale*

$$\psi \rightarrow e^{\frac{ig\gamma_5}{\hbar c}\phi}\psi, \quad B_\mu \rightarrow B_\mu + i\partial_\mu\phi \quad (1.3)$$

qui, contrairement à la précédente, n'est valable que pour une particule de *masse nulle*. Elle laisse invariante l'équation :

$$\gamma_\mu(\partial_\mu - \frac{g}{\hbar c}\gamma_5 B_\mu)\psi = 0, \quad (1.4)$$

qui représente un *monopôle magnétique* (voir travaux cités).

Elle possède toutes les bonnes lois de symétrie, elle redonne l'équation de Poincaré à l'approximation de l'optique géométrique et la relation de Dirac [8]

$$\frac{eg}{\hbar c} = \frac{n}{2} \quad (n \in Z) \quad (1.5)$$

si on soumet ce monopôle à un champ électrique coulombien. Rappelons que e est la charge électrique et g la charge magnétique.

On a de plus :

$$A_\mu = (\vec{A}, iV), \quad B_\mu = (-i\vec{B}, W), \quad (1.6)$$

où  $A_\mu$  est le quadripotential de Lorentz et  $B_\mu$  le pseudo-potential de Cabibbo et Ferrari [9] au travers duquel le monopôle "voit" l'électromagnétisme [1][2][6].  $A_\mu$  est un quadrivecteur polaire, tandis que  $B_\mu$  est le dual d'un tenseur antisymétrique de rang 3, ce qui veut dire que dans  $R^3$ ,  $\vec{B}$  est un vecteur axial et W un pseudo-scalaire. Notons encore que contrairement à d'autres théories, la charge g est, dans l'équation (1.4), une constante scalaire vraie, comme toute autre constante physique, et que

---

<sup>1</sup> Nous utiliserons les coordonnées  $x_\mu = \{x, y, z, ict\}$  et donc des matrices  $\gamma$  telles que  $\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}$ .

le caractère *pseudo-scalaire* de la charge magnétique appartient ici à l'opérateur de charge

$$G = g\gamma_5 \quad (1.7)$$

qui est donc ici un q-nombre. Ceci est essentiel. En effet, en passant à la représentation de Weyl par la transformation :

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_4 + \gamma_5) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

où  $\xi$  et  $\eta$  sont des spineurs à 2 composantes ; l'équation (1.4) se scinde en deux :

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \vec{s}\cdot\vec{\nabla} - i\frac{g}{\hbar c}(W + \vec{s}\cdot\vec{B})\right)\xi = 0 \quad (1.9)$$

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \vec{s}\cdot\vec{\nabla} + i\frac{g}{\hbar c}(W - \vec{s}\cdot\vec{B})\right)\eta = 0,$$

où  $\vec{s}$  représente les matrices de Pauli et on montre que ces deux équations, en  $\xi$  et en  $\eta$ , s'échangent entre elles par chacune des transformations P, T et C. Mais, et c'est là le point important qui découle de l'expression (1.7) de l'opérateur de charge, la conjugaison de charge se réduit ici à un changement d' *hélicité* (comme pour le neutrino) sans changement du signe de  $g$ .

On peut maintenant se demander si ce monopôle magnétique est inévitablement de masse nulle ou bien s'il peut en être autrement. Or ce problème est apparenté à celui de la masse du neutrino et ceci d'autant plus que dans [2], on proposait l'hypothèse que le neutrino puisse être lui-même regardé comme un monopôle de charge magnétique nulle. En effet (1.5) signifie que :

$$g = ng_0 \quad \left(g_0 = \frac{\hbar c}{2e}\right). \quad (1.10)$$

Donc, la charge magnétique étant un multiple de la charge fondamentale  $g_0$ , le neutrino se réduit simplement au cas  $n = 0$ , puisque les équations (1.9) se réduisent respectivement aux équations du neutrino et de l'antineutrino à deux composantes.

Le problème de la masse du monopôle peut donc se rattacher à celle du neutrino, et c'est lui qui va nous mener au champ de Majorana. Mais auparavant, je voudrais rappeler que l'équation (1.4) admet une généralisation non linéaire avec masse [1][2] :

$$\left[\gamma_\mu(\partial_\mu - \frac{g}{\hbar c}\gamma_5 B_\mu) + \frac{1}{2}\frac{m(\rho^2)c}{\hbar}(\Omega_1 - i\Omega_2\gamma_5)\right]\psi = 0, \quad (1.11)$$

$$\Omega_1 = \bar{\psi}\psi, \quad \Omega_2 = -i\bar{\psi}\gamma_5\psi, \quad \rho^2 = \Omega_1^2 + \Omega_2^2, \quad (1.12)$$

où  $m(\rho^2)$  représente une fonction scalaire. Cette équation reste invariante dans la transformation de jauge chirale (1.3) et, grâce à (1.8), elle devient :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \xi}{\partial t} - \vec{s} \cdot \vec{\nabla} \xi - i \frac{g}{\hbar c} (W + \vec{s} \cdot \vec{B}) \xi + i \frac{m(|\xi^+ \eta|)c}{\hbar} (\eta^+ \xi) \eta = 0 \quad (1.13)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \vec{s} \cdot \vec{\nabla} \eta + i \frac{g}{\hbar c} (W - \vec{s} \cdot \vec{B}) \eta + i \frac{m(|\xi^+ \eta|)c}{\hbar} (\xi^+ \eta) \xi = 0$$

On peut montrer que le terme non linéaire qui figure dans ces équations est réellement un terme de masse. De plus, ces équations contiennent à la fois des états *bradyons* (moins rapides que la lumière), *tachyons* (plus rapides que la lumière), *luxons* (allant exactement à la vitesse  $c$ ) [2]. Or les équations non linéaires (1.11) ou (1.13) admettent elles aussi (pour  $g = 0$ ) le neutrino en tant que cas particulier. La coexistence des trois états précédents (bradyons, tachyons et luxons) dans l'équation signifie donc que le neutrino aussi devrait pouvoir se présenter sous ces trois états. Ceci rejoint une hypothèse formulée déjà antérieurement par Mignani et Recami [10][11].

Remarquons maintenant que l'état luxon que nous venons de citer à propos des équations (1.11) et (1.13) correspond évidemment à l'annulation des termes de masse non linéaires : les équations se réduisent alors aux équations linéaires (1.4) et (1.9). Or cette annulation peut se produire sans que s'annule pour autant aucun des deux champs  $\xi$  et  $\eta$ . Mais bien sûr, une liaison s'ensuivra entre  $\xi$  et  $\eta$  et c'est cette liaison qui nous conduira au champ de Majorana.

En effet, annuler les termes non linéaires équivaut à annuler ce que nous avons appelé l' *invariant chiral* [2]. Soit :

$$\rho^2 = \Omega_1^2 + \Omega_2^2 = 0, \quad (1.14)$$

ce qui peut s'écrire, en vertu de (1.8) :

$$\xi^+ \eta = 0. \quad (1.15)$$

Les solutions particulières de (1.11) et (1.13), et donc de (1.9), qui obéissent à cette équation sont très remarquables parce qu'elles correspondent à un couple monopôle-antimonopôle pour lequel le courant magnétique total est nul. Cette propriété découle de la relation suivante qui est équivalente à (1.15) comme on le vérifie facilement [2] :

$$\xi = e^{2i \frac{e}{\hbar c} \theta} i s_2 \eta^*, \quad \eta = -e^{2i \frac{e}{\hbar c} \theta} i s_2 \xi^* \quad (1.16)$$

où  $\theta(\vec{r}, t)$  est une phase arbitraire (son coefficient  $2e/\hbar c$  nous servira plus loin). En appliquant (1.8) on trouve la relation équivalente écrite sur le quadrispincur  $\psi$  :

$$\psi = e^{2i\frac{e}{\hbar c}\theta}\gamma_2\psi^* = e^{2i\frac{e}{\hbar c}\theta}\psi_c. \quad (1.17)$$

Autrement dit, à une phase près, les états  $\psi$ , définis par la condition (1.14) ou (1.15), qui annulent les termes non linéaires, seront leurs propres conjugués de charge. Ce qui veut dire qu'à cette phase près, la condition (1.14) ou (1.15) est la condition de Majorana [12] à [19]. Rappelons en effet que ce qu'on appelle "champ de Majorana" ou "équation abrégée de Majorana" n'est rien d'autre que l'équation (1.2) de Dirac assortie de la condition  $\psi = \psi_c$ , c. à d. (1.17) avec  $\theta = 0$ .

Le fait que cette condition surgisse dans la théorie du monopôle, conduit à essayer de pousser plus loin le rapprochement, d'autant plus que l'équation abrégée de Majorana a déjà été proposée pour décrire le neutrino : alors pourquoi pas aussi un monopôle magnétique ? Nous étudierons d'abord le comportement d'une particule de Majorana dans un champ électromagnétique en supposant que la particule est porteuse d'une charge électrique.

## 2. La représentation lagrangienne et l'invariance de jauge du champ de Majorana.

Plusieurs auteurs [17][18][19] ont fait allusion au problème d'une représentation lagrangienne du champ de Majorana et ils ont admis qu'une telle représentation n'est pas possible. Nous verrons tout de suite que c'est inexact, mais il est intéressant de voir d'abord où est la difficulté.

D'après ce que nous avons dit, l'équation de Majorana peut s'écrire, d'après (1.2) et  $\psi = \psi_c$  :

$$\gamma_\mu(\partial_\mu + \frac{ie}{\hbar c}A_\mu)\psi - \frac{m_0c}{\hbar}\psi_c = 0. \quad (2.1)$$

Si on cherche directement un lagrangien sous cette forme, il devra contenir un terme tel que

$$\bar{\psi}\psi_c = \psi^+\gamma_4\gamma_2\psi^*. \quad (2.2)$$

Or nous avons aussi

$$\begin{aligned} \gamma_k &= i\alpha_4\alpha_k \quad (k = 1, 2, 3), \quad \gamma_4 = \alpha_4, \quad \gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 \\ \alpha_k &= \begin{bmatrix} 0 & s_k \\ s_k & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

où les  $s_k$  sont les matrices de Pauli.

En introduisant ces expressions dans (2.2), on trouve identiquement :

$$\bar{\psi}\psi_c = 0 \quad (2.4)$$

et le terme correspondant disparaît donc du Lagrangien, d'où la difficulté en question.

Mais ce n'est pas ainsi que nous procéderons : nous considérerons le champ de Majorana comme un *état contraint* du champ de Dirac et nous écrirons la contrainte sous la forme (1.14). Le lagrangien de Majorana  $L_M$  sera donc simplement le lagrangien de Dirac  $L_D$  auquel nous ajouterons un terme de contrainte en introduisant une variable canonique supplémentaire  $\lambda$  :

$$L_M = L_D + \frac{\lambda}{2}(\Omega_1^2 + \Omega_2^2), \quad (2.5)$$

où  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sont donnés par (1.12). La variation de  $L_M$  par rapport à  $\psi$  nous donnera :

$$\gamma_\mu(\partial_\mu + i\frac{e}{\hbar c}A_\mu)\psi - \frac{m_0c}{\hbar}\psi + \lambda(\Omega_1 - i\Omega_2\gamma_5)\psi = 0, \quad (2.6)$$

Cette équation, qui ressemble à (1.11) avec un terme de masse et d'autres potentiels a été jadis proposée par Weyl dans un autre contexte et plusieurs fois retrouvée depuis [20]. Mais nous devons encore varier  $L_M$  par rapport à la variable canonique supplémentaire  $\lambda$ , ce qui donnera la relation (1.14) et fera donc disparaître le terme non linéaire dans (2.6). Et comme (1.14) est équivalente à (1.17), on trouve finalement l'équation :

$$\gamma_\mu(\partial_\mu + i\frac{e}{\hbar c}A_\mu)\psi - \frac{m_0c}{\hbar}e^{2i\frac{e}{\hbar c}\theta}\psi_c = 0, \quad (2.7)$$

où la phase  $\theta$ , rappelons le, est *arbitraire*.

On serait tenté de faire tout de suite  $\theta = 0$  pour retrouver l'équation de Majorana (2.1), mais ce serait une mauvaise idée parce que cette phase arbitraire est importante. En effet, c'est grâce à elle que l'équation (2.7) est *invariante de jauge* tandis que (2.1) ne l'était pas (ce dont personne, soit dit en passant, ne paraît s'être soucié).

L'invariance de jauge de (2.7) découle d'ailleurs directement de l'invariance du lagrangien (2.5). Mais on voit aussi, directement, que (2.7) se conserve par la transformation :

$$\psi \rightarrow e^{\frac{e}{\hbar c}\phi}\psi, \quad A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu\phi, \quad \theta \rightarrow \theta + \phi, \quad (2.8)$$

d'où il résulte que  $\theta$  peut être absorbé par la jauge. Plus précisément, nous choisirons d'abord la jauge, puis nous annulerons  $\theta$  et nous retrouverons alors l'équation (2.1).

Mais soulignons encore que cette équation de Majorana pourra avant tout être considérée comme représentant un état de l'électron de Dirac. Cependant, nous verrons qu'on peut aussi la regarder "en elle-même" et que cette seconde interprétation n'est pas physiquement équivalente à la première.

### 3. Equation à deux composantes. Lois de symétrie et de conservation.

En introduisant la première formule (1.6), la transformation (1.8) et les formules (1.16) et (1.17), dans l'équation (2.7), celle-ci se scinde en deux équations à deux composantes chacune :

$$(\pi_0 + \vec{\pi} \cdot \vec{s})\xi - im_0ce^{\frac{2ie\theta}{\hbar c}}s_2\xi^* = 0 \quad (3.1)$$

$$(\pi_0 - \vec{\pi} \cdot \vec{s})\eta + im_0ce^{2i\frac{e}{\hbar c}\theta}s_2\eta^* = 0 \quad (3.2)$$

où nous avons posé :

$$\pi_0 = \frac{1}{c}(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + eV), \quad \vec{\pi} = (-i\hbar\vec{\nabla} + \frac{e}{c}\vec{A}). \quad (3.3)$$

N'oublions pas que, jusqu'à présent, le système (3.1), (3.2) n'est rien d'autre qu'une représentation particulière de l'équation de Dirac (1.2) à laquelle on a appliqué la *contrainte* (1.14) ou (1.15). Cette contrainte est manifestement C, P et T invariante mais il est intéressant de le vérifier directement. Des calculs simples montrent qu'en effet, les deux équations (3.1) et (3.2) s'échangent, (ce qui laisse bien le système invariant) dans les trois transformations suivantes :

$$(C) : i \rightarrow -i, \quad e \rightarrow -e, \quad \xi \rightarrow e^{2i\frac{e}{\hbar c}\theta}is_2\eta^*, \quad \eta \rightarrow -e^{2i\frac{e}{\hbar c}\theta}is_2\xi^* \quad (3.4)$$

$$(P) : \vec{x} \rightarrow -\vec{x}, \quad \vec{A} \rightarrow -\vec{A}, \quad \xi \rightarrow i\eta, \quad \eta \rightarrow -i\xi \quad (3.5)$$

$$(T) : e \rightarrow -e, \quad t \rightarrow -t, \quad V \rightarrow -V, \quad \eta \rightarrow s_2\xi^*, \quad \xi \rightarrow -s_2\eta^* \quad (3.6)$$

Pour P et T, nous avons utilisé les lois de Curie [7]. D'autre part, la phase  $\theta$  étant arbitraire, P peut encore s'écrire :

$$(P) : \vec{x} \rightarrow \vec{x}, \quad \vec{A} \rightarrow -\vec{A}, \quad \xi \longleftrightarrow \eta, \quad \theta \rightarrow \theta + \frac{\pi}{2}\frac{\hbar c}{e}, \quad (3.5')$$

En outre, la transformation de jauge (2.8) s'écrit ici, pour le système (3.1), (3.2) :

$$\xi \rightarrow e^{i\frac{e}{\hbar c}\phi}\xi, \quad \eta \rightarrow e^{i\frac{e}{\hbar c}\phi}\eta, \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A} - \vec{\nabla}\phi, \quad (3.7)$$

$$V \rightarrow V + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \theta \rightarrow \theta + \phi$$

et on vérifie que cette transformation laisse invariante chacune des équations (3.1) et (3.2).

A l'invariance (3.7) des deux équations (3.1) et (3.2) correspondent respectivement les deux lois de conservation :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial(\xi^+ \xi)}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\xi^+ \vec{s} \xi) = 0, \quad (3.8)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial(\eta^+ \eta)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\eta^+ \vec{s} \eta) = 0, \quad (3.9)$$

où les deux courants :

$$X_\mu = \{\xi^+ \xi, -c \xi^+ \vec{s} \xi\}, \quad Y_\mu = \{\eta^+ \eta, c \eta^+ \vec{s} \eta\}, \quad (3.10)$$

sont les *courants chiraux* que nous avons déjà rencontré dans la théorie du monopôle [1][2]. Rappelons qu'ils sont isotropes et que d'après (1.16), ils sont orthogonaux :

$$X_\mu X_\mu = Y_\mu Y_\mu = X_\mu Y_\mu = 0 \quad (3.11)$$

Or il est intéressant de remarquer que, s'ils se conservent en vertu des équations (3.1), (3.2) qui sont, ne l'oublions pas, un *état contraint* de l'équation de Dirac, en revanche ils ne se conservent pas si on prend l'équation de Dirac sous sa forme générale. Pour faire la comparaison, introduisons (1.8) dans (1.2) pour écrire l'équation de Dirac en termes de spineurs  $\xi$  et  $\eta$  :

$$\begin{aligned} (\pi_0 + \vec{\pi} \cdot \vec{s}) \xi + m_0 c \eta &= 0 \\ (\pi_0 + \vec{\pi} \cdot \vec{s}) \eta + m_0 c \xi &= 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

où  $\pi_0$  et  $\vec{\pi}$  ont les expressions (3.3). On trouve facilement d'après (3.12) les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial(\xi^+ \xi)}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\xi^+ \vec{s} \xi) - i \frac{m_0 c}{\hbar} (\xi^+ \eta - \eta^+ \xi) &= 0 \\ \frac{1}{c} \frac{\partial(\eta^+ \eta)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\eta^+ \vec{s} \eta) + i \frac{m_0 c}{\hbar} (\xi^+ \eta - \eta^+ \xi) &= 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

On voit donc que, dans le cas général, les courants chiraux ne se conservent pas et qu'il s'introduit une source dans les équations de continuité. Cette source n'est autre que le *pseudo-invariant*  $\Omega_2$  de Dirac, car on a d'après (1.8) :

$$\Omega_2 = -i \bar{\psi} \gamma_5 \psi = i(\xi^+ \eta - \eta^+ \xi). \quad (3.14)$$



Par contre, on vérifie bien, d'après (1.15) que la contrainte  $\xi^+\eta = 0$  qui fait passer des équations (3.12) aux équations (3.1), (3.2) annule les termes de source dans (3.13) et redonne les lois de conservation (3.8), (3.9).

Il est utile, maintenant, de revenir aux spineurs  $\psi$  (toujours grâce à (1.8)) en utilisant les matrices de Dirac  $\alpha$  et  $\sigma$ . On trouve alors les *identités* :

$$J_\mu = -i\bar{\psi}\gamma_\mu\psi = \{-i\psi^+\psi, \psi^+\vec{\alpha}\psi\} \quad (3.15)$$

$$= \{-i\xi^+\xi, \xi^+\vec{s}\xi\} + \{-i\eta^+\eta, -\eta^+\vec{s}\eta\}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_\mu &= -i\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi = \{-i\psi^+\sigma_4\psi, \psi^+\vec{\sigma}\psi\} \\ &= \{-i\xi^+\xi, \xi^+\vec{s}\xi\} - \{-i\eta^+\eta, -\eta^+\vec{s}\eta\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Soit encore :

$$\begin{aligned} \psi^+\psi &= \xi^+\xi + \eta^+\eta, & \psi^+\vec{\alpha}\psi &= \xi^+\vec{s}\xi - \eta^+\vec{s}\eta \\ \psi^+\sigma_4\psi &= \xi^+\xi - \eta^+\eta, & \psi^+\vec{\sigma}\psi &= \xi^+\vec{s}\xi + \eta^+\vec{s}\eta \end{aligned} \quad (3.17)$$

Rappelons que :

$$\gamma_4 = \alpha_4 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}, \vec{\alpha}_k = \begin{bmatrix} 0 & \vec{s} \\ \vec{s} & 0 \end{bmatrix}, \vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \vec{s} & 0 \\ 0 & \vec{s} \end{bmatrix}, \sigma_4 = \gamma_5 = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

On voit donc que  $J_\mu$ , c'est à dire la *densité de courant électrique* est la *somme* des deux courants chiraux, tandis que  $\Sigma_\mu$  qui a été interprété dans [1] et [2] comme la *densité de courant magnétique* total, est la *différence* entre les deux courants chiraux.

A l'aide des formules de (3.13) à (3.16), on trouve aussitôt, toujours pour l'équation de Dirac :

$$\partial_\mu J_\mu = 0, \quad \partial_\mu \Sigma_\mu + 2\frac{m_0 c}{\hbar}\Omega_2 = 0. \quad (3.19)$$

La première formule signifie la conservation de l'électricité. La seconde porte le nom de relation d'Uhlenbeck et Laporte [21],[22] et n'avait jamais été interprétée jusqu'ici. D'après les références [1] et [2],  $\Sigma_\mu$  peut être regardé comme la somme des courants magnétiques gauche et droit ou encore des courants de monopôles et d'antimonopôles, chacun d'entre eux étant porté par l'un des deux courants  $X_\mu, Y_\mu$ , ne se conservent que dans deux cas, qui annulent leur source :

- 1) Si  $m_0 = 0$  : c'est le cas des équations (1.4), (1.9), (1.11) précédemment étudiées.
- 2) Si  $\Omega_2 = 0$  et c'est le cas de l'équation de Majorana, ou encore de l'équation invariante de jauge (2.7) et du système équivalent (3.1), (3.2), puisqu'on a alors les relations (1.14) et (1.15).

Mais il faut préciser un peu, car ces relations, et donc  $\Omega_2 = 0$ , ne sont évidemment pas satisfaites par n'importe quel couple de solutions  $\xi$  et  $\eta$  des équations respectives (3.1), (3.2), mais seulement pour les couples  $\xi, \eta$  particuliers qui obéissent à la relation (1.15), c. à d. tels que  $\xi^+\eta = 0$ . Auquel cas, d'ailleurs, en vertu de (1.16) on vérifie facilement que :

$$\xi^+\eta = 0 \rightarrow X_\mu = Y_\mu \rightarrow J_\mu = 2X_\mu, \quad \Sigma_\mu = 0. \quad (3.20)$$

Le courant électrique devient alors isotrope, tandis que le courant magnétique total disparaît tout à fait. C'est l'isotropie du courant électrique qui permet de dire que l'équation de Dirac est prise sur le cône de lumière.

Mais comme, en réalité, les équations (3.1) et (3.2) sont découplées nous pouvons en prendre une, (3.1) par exemple, et la regarder *en elle-même* en oubliant (3.2), ou tout au moins en ne nous limitant plus aux seuls couples de solutions tels que  $\xi^+\eta = 0$ . Alors (3.1) peut être regardée comme représentant un certain *état chiral de l'électron* dont (3.2) est à la fois le conjugué de charge, l'image dans un miroir et l'inverse temporel, en vertu de (3.4), (3.5) et (3.6).

#### 4. L'état chiral de l'électron dans un champ électrique coulombien.

Majorana considérait qu'en imposant l'égalité  $\psi = \psi_c$  dans l'équation de Dirac, il obtiendrait en quelque sorte une théorie conjointe, ou simultanée, de l'électron et du positron. Ce n'est pas tout à fait exact puisque nous venons de voir qu'il s'agit plutôt d'une contrainte imposée à l'électron. Mais pourtant, nous verrons qu'il s'agit bien d'un état hybride qui participe à la fois de l'électron et du positron. Pour le voir, nous allons résoudre l'équation (3.1) dans un champ électrique coulombien, en introduisant dans (3.3) :

$$eV = \frac{-e^2}{r}, \quad \vec{A} = 0, \quad (4.1)$$

ce qui correspond au champ d'un proton. Nous ferons le calcul en choisissant, dans (3.1), la phase arbitraire  $\theta$  telle que :

$$\theta = \frac{\pi \hbar c}{4 e} \quad (4.2)$$

ce qui donne l'équation :

$$\left[ \frac{1}{c} \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{e^2}{r} \right) - i\hbar \vec{s} \cdot \vec{\nabla} \right] \xi + m_0 c s_2 \xi^* = 0 \quad (4.3)$$

La difficulté proviendra évidemment de la présence du  $\xi$  complexe conjugué :  $\xi^*$ .

Nous introduirons les fonctions sphériques habituelles avec spin [22][23][24] que nous écrirons :

$$\Omega_l^m(+)=\begin{bmatrix} \left(\frac{l+m}{2l+1}\right)^{\frac{1}{2}} Y_l^{m-1} \\ \left(\frac{l-m+1}{2l+1}\right)^{\frac{1}{2}} Y_l^m \end{bmatrix}, \quad \Omega_l^m(-)=\begin{bmatrix} \left(\frac{l-m+1}{2l+1}\right)^{\frac{1}{2}} Y_l^{m-1} \\ -\left(\frac{l+m}{2l+1}\right)^{\frac{1}{2}} Y_l^m \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

où les  $Y_l^m$  sont les fonctions sphériques de Laplace que nous écrirons :

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} \left(\frac{2l+1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{im\phi}}{\sin^l \theta} \frac{d^{l-m}}{d\theta^{l-m}} \sin^{2l} \theta \quad (4.5)$$

avec  $l=0,1,2,\dots$  ;  $m=-l,-l+1,\dots,l-1,l$ .

On peut alors montrer les relations suivantes (Appendice A) :

$$\begin{aligned} \vec{s} \cdot \vec{n} \Omega_{l-1}^m(+)&= \Omega_l^m(-) ; \quad \vec{s} \cdot \vec{n} \Omega_l^m(-) = \Omega_{l-1}^{m+1}(+) ; \\ \vec{s} \cdot \vec{n} s_2 \Omega_{l-1}^{*m}(+)&= i(-1)^{m+1} \Omega_l^{-m+1}(-) ; \\ \vec{s} \cdot \vec{n} s_2 \Omega_l^{*m}(-)&= i(-1)^m \Omega_{l-1}^{-m+1}(+) ; \end{aligned} \quad (4.6)$$

Rappelons que :

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r} ; \quad x = r \cos \phi \sin \theta, \quad y = r \sin \phi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta. \quad (4.7)$$

Nous allons maintenant chercher une solution de (4.3) sous la forme :

$$\xi = \sum_m F_{l-1}^m(t, r) \Omega_{l-1}^m(+) + \sum_{m'} G_l^{m'}(t, r) \Omega_l^{m'}(-) \quad (4.8)$$

On voit bien qu'il n'est pas possible de séparer tout de suite l'une de l'autre les variables  $t$  et  $r$ . On peut seulement séparer les variables angulaires  $\phi$  et  $\theta$ . Suivant des procédés classiques en théorie de Dirac [22], [24], nous allons introduire (4.8) dans (4.3) et multiplier à gauche par  $\vec{s} \cdot \vec{n}$ . Grâce à (4.6) on obtient d'abord :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c} \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{e^2}{r} \right) \left[ \sum_m F_{l-1}^m \Omega_l^m(-) + \sum_{m'} G_l^{m'} \Omega_{l-1}^{m'}(+)\right] \\ &= i\hbar \vec{s} \cdot \vec{n} \vec{s} \cdot \vec{\nabla} \left[ \sum_m F_{l-1}^m \Omega_{l-1}^m(+)+\sum_{m'} G_l^{m'} \Omega_l^{m'}(-)\right] \\ &- im_0 c \left[ \sum_m (-1)^{m+1} F_{l-1}^{*m} \Omega_l^{-m+1}(-) + \sum_{m'} (-1)^{m'} G_l^{*m'} \Omega_{l-1}^{-m'+1}(+)\right] \end{aligned} \quad (4.9)$$

Le second membre s'arrange grâce aux relations classiques :

$$\vec{s} \cdot \vec{n} \vec{s} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \vec{s} \cdot \vec{\Lambda} \quad (4.10)$$

où  $\vec{\Lambda}$  est le moment orbital :

$$\vec{\Lambda} = -i\vec{r} \times \vec{\nabla}. \quad (4.11)$$

On trouve en outre les relations aux valeurs propres (Appendice B)

$$\begin{aligned} \vec{s} \cdot \vec{\Lambda} \Omega_l - 1^m(+)&= (l-1)\Omega_l - 1^m(+), \\ \vec{s} \cdot \vec{\Lambda} \Omega_l^m(-)&= -(l+1)\Omega_l^m(-) \end{aligned} \quad (4.12)$$

si bien qu'en tenant compte de ce que les  $\Omega_l^m(\pm)$  sont orthonormés, on tire de (4.9) le système suivant d'où les angles sont éliminés :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + i \frac{\alpha}{r}\right) F_{l-1}^m &= \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1+l}{r}\right) G_l^m + \chi(-1)^m F_{l-1}^{*-m+1} \\ \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + i \frac{\alpha}{r}\right) G_l^m &= \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1-l}{r}\right) F_{l-1}^m - \chi(-1)^m G_l^{*-m+1} \end{aligned} \quad (4.13)$$

où l'on a :

$$m = -l, -l+1, \dots, l-1, l, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c}, \quad \chi = \frac{m_0 c}{\hbar} \quad (4.14)$$

Prenons le système complexe conjugué de (4.13) en changeant :  $m \leftrightarrow -m+1$ . Nous aurons :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - i \frac{\alpha}{r}\right) F_{l-1}^{*-m+1} &= \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1+l}{r}\right) G_l^{*-m+1} - \chi(-1)^m F_{l-1}^m \\ \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - i \frac{\alpha}{r}\right) G_l^{*-m+1} &= \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1-l}{r}\right) F_{l-1}^{*-m+1} + \chi(-1)^m G_l^m \end{aligned} \quad (4.15)$$

Nous allons maintenant combiner les équations (4.13) et (4.15) en introduisant le changement de fonctions :

$$\begin{aligned} \frac{A_{l-1}^m(r)}{r} e^{(-1)^m i \omega t} &= F_{l-1}^m + (-1)^m F_{l-1}^{*-m+1}; \\ \frac{B_{l-1}^m(r)}{r} e^{(-1)^m i \omega t} &= F_{l-1}^m - (-1)^m F_{l-1}^{*-m+1}; \\ \frac{C_l^m(r)}{r} e^{(-1)^m i \omega t} &= G_l^m + (-1)^m G_l^{*-m+1}; \\ \frac{D_l^m(r)}{r} e^{(-1)^m i \omega t} &= G_l^m - (-1)^m G_l^{*-m+1}; \end{aligned} \quad (4.16)$$

avec :

$$B_{l-1}^m = (-1)^{m+1} A_{l-1}^{*-m+1} ; D_l^m = (-1)^{m+1} C_l^{*-m+1} \quad (4.16')$$

On vérifie qu'avec la condition (4.16') les notations (4.16) restent invariantes si on change  $m$  en  $-m+1$ , en prenant les complexes conjugués. En sommant et en retranchant (4.13) et (4.15) on trouve un système différentiel qui est seulement en  $r$  et de rang unité [25],[26]. il s'écrit :

$$r \frac{dX}{dr} = (M + Nr)X, \quad (4.17)$$

en introduisant les notations :

$$\omega' = (-1)^m \omega ; X = \begin{bmatrix} A_{l-1}^m(r) \\ B_{l-1}^m(r) \\ C_l^m(r) \\ D_l^m(r) \end{bmatrix} ; \quad (4.18)$$

$$M = \begin{bmatrix} l & 0 & 0 & i\alpha \\ 0 & l & i\alpha & 0 \\ 0 & i\alpha & -l & 0 \\ i\alpha & 0 & 0 & -l \end{bmatrix} ; N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i\frac{\omega'}{c} & -\chi \\ 0 & 0 & \chi & i\frac{\omega'}{c} \\ i\frac{\omega'}{c} & \chi & 0 & 0 \\ -\chi & i\frac{\omega'}{c} & 0 & 0 \end{bmatrix} ;$$

Nous allons d'abord diagonaliser  $N$ , ce qui s'obtient avec la matrice :

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{\omega'}{\mu c} & i\frac{\chi}{\mu} \\ 0 & 1 & -i\frac{\chi}{\mu} & \frac{\omega'}{\mu c} \\ 1 & 0 & -\frac{\omega'}{\mu c} & -i\frac{\chi}{\mu} \\ 0 & 1 & i\frac{\chi}{\mu} & -\frac{\omega'}{\mu c} \end{bmatrix} ; \quad \mu = \sqrt{\frac{\omega'^2}{c^2} - \chi^2} \quad (4.19)$$

Le changement de variable :

$$Y = SX \quad (4.20)$$

permet d'écrire l'équation (4.17) sous la forme :

$$r \frac{dY}{dr} = \left\{ i\mu r \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} + l \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} + \frac{\alpha}{\mu} \begin{bmatrix} \frac{\omega'}{c} s_1 + i\chi s_3 & 0 \\ 0 & -\frac{\omega'}{c} s_1 - i\chi s_3 \end{bmatrix} \right\} Y \quad (4.21)$$

où  $\mu$  est défini en (4.19),  $I$  est la matrice unité d'ordre 2 et  $s_1, s_3$  les matrices de Pauli. Nous allons encore transformer (4.21) par le changement de fonctions inconnues :

$$Z = \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & s_1 V \end{bmatrix} Y ; V = \left[ \frac{\omega'}{2\mu c} \right]^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} \left[ \frac{\omega'/c}{\mu - i\chi} \right]^{\frac{1}{2}} & \left[ \frac{\mu - i\chi}{\omega'/c} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \left[ \frac{\omega'/c}{\mu + i\chi} \right]^{\frac{1}{2}} & - \left[ \frac{\mu + i\chi}{\omega'/c} \right]^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

où  $V$  a été choisie telle que

$$V \left( \frac{\Omega'}{c} s_1 + i\chi s_3 \right) V^{-1} = \mu s_3 \quad (4.23)$$

L'équation prend alors la forme :

$$r \frac{dZ}{dr} = \left\{ i\mu r \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} + l \begin{bmatrix} 0 & s_1 \\ s_1 & 0 \end{bmatrix} + i\alpha \begin{bmatrix} s_3 & 0 \\ 0 & s_3 \end{bmatrix} \right\} Z \quad (4.24)$$

et en l'itérant, on trouve :

$$\left[ r \frac{d}{dr} \right]^2 Z = \left\{ -\mu^2 r^2 + \mu r \left( i \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} - 2\alpha \begin{bmatrix} s_3 & 0 \\ 0 & -s_3 \end{bmatrix} \right) + l^2 - \alpha^2 \right\} Z \quad (4.25)$$

Toutes les matrices sont diagonales et on est ramené à des équations différentielles indépendantes pour les composantes de  $Z$  :

$$L \left[ r \frac{d}{dr} \right]^2 Z_n = [-\mu^2 r^2 + \mu r (i\epsilon - 2\alpha\epsilon') + l^2 - \alpha^2] Z_n \quad (n = 1, 2, 3, 4) \quad (4.26)$$

$$\epsilon = 1, 1, -1, -1 ; \epsilon' = 1, -1, -1, 1 \quad (\text{pour } n = 1, 2, 3, 4) \quad (4.27)$$

Si nous posons maintenant :

$$r = \frac{i\rho}{2\mu}, \quad W_n = \rho^{\frac{1}{2}} Z_n, \quad (4.28)$$

l'équation (4.26) se ramène à la forme suivante, en omettant l'indice  $n$  :

$$\frac{d^2 W}{d\rho^2} + \left[ -\frac{1}{4} + \frac{\epsilon - i\alpha\epsilon'}{\rho} + \frac{\frac{1}{4} + \alpha^2 - l^2}{\rho^2} \right] W = 0. \quad (4.29)$$

C'est une équation de Whittaker de coefficients [25][26] :

$$k = \frac{\epsilon}{2} - i\alpha\epsilon', \quad m = \sqrt{l^2 - \alpha^2} \quad (4.30)$$

(bien entendu,  $k$  et  $m$  n'ont aucun rapport avec des indices précédemment utilisés, mais nous garderons cette notation consacrée pour  $W_k, m$ ).

Nous pourrions prendre une fonction de Whittaker :

$$w_k, m(\rho) = W_{\frac{\epsilon}{2} - i\alpha\epsilon', l^2 - \alpha^2}(-2i\mu r) \quad (4.31)$$

pour calculer les fonctions radiales à condition, tout d'abord, que ces dernières soient de carré intégrable à l'origine, Or on sait [23] qu'au voisinage de l'origine, la solution régulière de (4.29) peut s'écrire, en tenant compte de (4.28) et 4.30) :

$$|W_k, m| = 2\mu r^{\frac{1}{2}+m}(1 + O(r)) \quad (4.32)$$

Observons que le coefficient  $m$  est le même pour toutes les composantes  $W_n$  et donc  $Z_n$  dans (4.26). Donc, en remontant les changements de fonctions (4.28), (4.22), (4.20), (4.16), (4.8), nous pouvons affirmer que :

$$\xi^+\xi \approx r^2(m-1) \quad (\text{au voisinage de } r=0) \quad (4.33)$$

et d'après la valeur (4.30) de  $m$ , on voit que  $\xi^+\xi$  sera toujours intégrable à l'origine puisque  $l = 0, 1, 2, \dots$

Mais le plus intéressant est le *comportement à l'infini*. D'après une formule classique [26] :

$$W_{k,m}(\rho) = e^{-\frac{1}{2}\rho}\rho^k(1 + O(\rho^{-1})) \quad \text{si } |\text{Arg}(-\rho)| < \pi. \quad (4.34)$$

La condition de validité est satisfaite parce que :  $\rho = -2i\mu r$  d'après (4.28) et on a donc d'après (4.30) :

$$|W_{k,m}(\rho)| = 2\mu r^{\frac{\epsilon}{2}}(1 + O(r^{-1})) \quad (4.35)$$

avec  $\epsilon = \pm 1$  comme dans (4.26)

En remontant, comme précédemment, les changements de fonctions jusqu'à  $\xi^+\xi$  on se trouve devant une petite difficulté parce que, contrairement à ce qui se passait pour  $r \approx 0$  où l'exposant dans (4.32) était le même pour toutes les composantes  $W$  ou  $Z$ , il n'en est pas de même ici avec l'exposant  $\frac{\epsilon}{2}$  dans (4.35). En utilisant à

nouveau (4.28), (4.22), (4.20), (4.16), et (4.8), on voit facilement que  $\xi^+\xi$  admet la forme asymptotique :

$$\xi^+\xi = \sum a_{nn'} r^{\epsilon_n + \epsilon_{n'} - 3} \quad (\text{pour } r \rightarrow \infty) \quad (4.36)$$

où  $\epsilon_n$  et  $\epsilon'_n$  représentent les valeurs  $\epsilon = \pm 1$ , qui changent, d'après (4.27), selon la composante de  $Z$  dans (4.24). Ceci nous amène aux conclusions suivantes :

### 5. Conclusions physiques sur le comportement, dans un champ électrique coulombien, d'un état chiral de l'électron de Dirac (électron de Majorana).

Tout d'abord, la forme asymptotique (4.36) montre que  $\xi^+\xi$  ne serait intégrable sur tout l'espace que s'il ne subsistait dans la somme qui figure au second membre de (4.36) aucun nombre  $\epsilon_n = 1$ . En effet, les différentes valeurs de  $\epsilon_n$  et  $\epsilon'_n$  donnent des termes en :

$$r^{-5} \quad (\text{pour } \epsilon_n + \epsilon_{n'} = -2); \quad r^{-3} \quad (\text{pour } \epsilon_n + \epsilon_{n'} = 0); \quad r^{-1} \quad (\text{pour } \epsilon_n + \epsilon_{n'} = 2).$$

Or seul le premier type de terme donne une intégrale convergente à l'infini et, pour que l'intégrale de  $\xi^+\xi$  converge, il faut donc bien supprimer les  $\epsilon_n = 1$ , ce qui revient à annuler identiquement les composantes  $Z_1$  et  $Z_2$  dans l'équation (4.24). Mais si on fait cela, on vérifie que l'on a identiquement  $Z \equiv 0$  et la fonction d'onde disparaît.

Donc  $\xi^+\xi$  n'est jamais sommable sur tout l'espace et on voit que *l'électron de Majorana ne possède pas d'états liés dans un champ coulombien*. Le spectre sera continu et tous les états seront d'ionisation. Il faut noter que *le signe de  $\alpha$*  dans l'équation (4.24) n'intervient pas. Or ce signe est celui du potentiel central dans l'équation (4.3). Donc *l'électron de Majorana aura un comportement diffusant qui sera du même type, qu'il soit dans un champ coulombien positif ou négatif*.

Et il est facile de comprendre pourquoi. En effet, dans l'état  $\xi$  (4.8), qui est associé à une valeur propre  $\frac{l-1}{2}$  du moment cinétique total, les termes correspondant aux différentes valeurs de  $m$  auront, d'après (4.16) des facteurs exponentiels  $e^{(-1)^m \omega t}$ . Or  $\omega$  n'est autre que l'énergie et on voit donc que  $\xi$  est une superposition d'états à énergies positives et négatives : donc d'états "électrons" et d'états "positrons".

On voit donc que le champ de Majorana n'est pas à proprement parler, une théorie simultanée de l'électron et du positron.

C'est un état hybride de l'électron de Dirac dans lequel celui-ci "ne sait pas" quelle est sa charge électrique. On comprend donc qu'il ne puisse plus avoir d'états liés. Mais ses états diffusifs seront très différents de ceux d'un électron rapide dans son état "normal", puisque les fonctions d'onde ne sont pas les mêmes que celles d'un système keplerien ordinaire dans un état d'ionisation.



Pour nous en rendre compte, nous allons refaire le calcul précédent, à la limite classique. Nous verrons, en effet, que toutes les trajectoires sont hyperboliques, mais que les hyperboles en question *ne sont pas keplériennes*. Et nous verrons aussi que, la limite classique ignorant la superposition quantique, il y aura deux sortes d'hyperboles qui correspondront respectivement à une diffusion dans un champ attractif et dans un champ répulsif.

### 6. L'électron de Majorana à l'approximation de l'optique géométrique.

Reprenons l'équation générale (3.1) en  $\xi$  avec les définitions (3.3) et, la jauge électromagnétique étant supposée fixée, choisissons pour  $\theta$  la valeur (4.2) et introduisons dans (3.1) l'expression :

$$\xi = a(t, \vec{r})e^{-\frac{i}{\hbar}S(t, \vec{r})} + b(t, \vec{r})e^{+\frac{i}{\hbar}S(t, \vec{r})}, \quad (6.1)$$

où  $a(t, \vec{r})$  et  $b(t, \vec{r})$  sont de nouveaux *spineurs*.

En négligeant les termes qui ont  $\hbar$  en facteur, il reste l'équation :

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[ \frac{1}{c} \left( \frac{\partial S}{\partial t} + eV \right) - (\vec{\nabla} S - \frac{e}{c} \vec{A}) \cdot \vec{s} \right] a + m_0 c s_2 b^* \right\} e^{-\frac{i}{\hbar}S} \\ & - \left\{ \left[ \frac{1}{c} \left( \frac{\partial S}{\partial t} - eV \right) - (\vec{\nabla} S + \frac{e}{c} \vec{A}) \cdot \vec{s} \right] b - m_0 c s_2 a^* \right\} e^{+\frac{i}{\hbar}S} = 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

Si  $\hbar \rightarrow 0$ , les phases  $\pm \frac{S}{\hbar}$  deviennent infiniment rapides et, en multipliant alternativement le système (5.2) par  $e^{\frac{iS}{\hbar}}$  et  $e^{-\frac{iS}{\hbar}}$ , on trouve l'approximation de l'optique géométrique :

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{c} \left( \frac{\partial S}{\partial t} + eV \right) - (\vec{\nabla} S - \frac{e}{c} \vec{A}) \cdot \vec{s} \right] a + m_0 c s_2 b^* = 0 \\ & \left[ \frac{1}{c} \left( \frac{\partial S}{\partial t} - eV \right) - (\vec{\nabla} S + \frac{e}{c} \vec{A}) \cdot \vec{s} \right] b - m_0 c s_2 a^* = 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

Introduisons maintenant un spineur  $\hat{b}$  tel que

$$\hat{b} = s_2 b^*, \quad (6.4)$$

prenons le complexe conjugué de la seconde équation (6.3) et multiplions par  $s_2$ . Il vient :

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{c} \left( \frac{\partial S}{\partial t} + eV \right) - (\vec{\nabla} S - \frac{e}{c} \vec{A}) \cdot \vec{s} \right] a + m_0 c \hat{b} = 0 \\ & \left[ \frac{1}{c} \left( \frac{\partial S}{\partial t} - eV \right) + (\vec{\nabla} S + \frac{e}{c} \vec{A}) \cdot \vec{s} \right] \hat{b} - m_0 c a = 0 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Multiplions la première équation par la matrice qui multiplie  $\hat{b}$  dans la seconde. Nous aurons :

$$\left\{ \left[ \frac{1}{c} \left( \frac{\partial S}{\partial t} - eV \right) + (\vec{\nabla} S + \frac{e}{c} \vec{A}) \cdot \vec{s} \right] \left[ \frac{1}{c} \left( \frac{\partial S}{\partial t} + eV \right) - (\vec{\nabla} S - \frac{e}{c} \vec{A}) \cdot \vec{s} \right] - m_0^2 c^2 \right\} a = 0 \quad (6.6)$$

Soit encore :

$$\left\{ \frac{1}{c} \left( \frac{\partial S}{\partial t} + eV \right) \left( \frac{\partial S}{\partial t} - eV \right) - (\vec{\nabla} S + \frac{e}{c} \vec{A}) (\vec{\nabla} S - \frac{e}{c} \vec{A}) - m_0^2 c^2 + 2 \frac{e}{c} \left[ V \vec{\nabla} S + \frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} \vec{A} + i \vec{\nabla} S \times \vec{A} \right] \cdot \vec{s} \right\} a = 0 \quad (6.7)$$

Pour que  $a \neq 0$ , nous devons annuler le déterminant de la matrice, ce qui nous donne une équation de Hamilton-Jacobi, que nous n'écrivons que pour  $\vec{A} = 0$  :

$$\left[ \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - (\vec{\nabla} S)^2 - \frac{e^2}{c^2} V^2 - m_0^2 c^2 \right]^2 - \frac{4e^2}{c^2} V^2 (\vec{\nabla} S)^2 = 0 \quad (6.8)$$

Une factorisation nous donne alors *deux équations* qui s'écrivent, dans le cas coulombien (4.1), sous la forme suivante, qui montre bien que le signe des charges en présence ne joue finalement aucun rôle (bien entendu, le  $\epsilon = \pm 1$  ne correspond pas au choix du signe de la charge de la particule ou du champ central, mais provient simplement de la factorisation de (6.8)) :

$$\frac{1}{c} \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - \left( |\vec{\nabla} S| - \frac{\epsilon e^2}{c} \frac{1}{r} \right)^2 - m_0^2 c^2 = 0 \quad (\epsilon = \pm 1) \quad (6.9)$$

On voit que ces deux équations de Hamilton-Jacobi sont différentes de celles que l'on connaît habituellement pour un électron dans un champ coulombien de signe quelconque qui s'écrit :

$$\frac{1}{c} \left( \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\epsilon e^2}{r} \right)^2 - (\vec{\nabla} S)^2 - m_0^2 c^2 = 0 \quad (\epsilon = \pm 1) \quad (6.10)$$

Introduisons maintenant, dans (6.9) la décomposition :

$$S = -Et + W \quad (6.11)$$

On obtient :

$$\frac{E^2}{c^2} - m_0^2 c^2 = \left[ |\vec{\nabla}W| - \frac{\epsilon e^2}{c} \frac{1}{r} \right]^2, \quad (6.12)$$

ce qui montre déjà que :

$$E \geq m_0 c^2 \quad (6.13)$$

Autrement dit, il n'y aura *pas d'états liés* et donc *pas de trajectoires fermées*.

De (6.12), on tire maintenant les deux équations :

$$(\vec{\nabla}W)^2 = \frac{1}{c^2} \left( \sqrt{E^2 - m_0^2 c^4} + \frac{\epsilon e^2}{r} \right)^2 \quad (\epsilon = \pm 1) \quad (6.14)$$

Nous aurons alors, en coordonnées polaires :

$$(\vec{\nabla}W)^2 = \left( \frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 \quad (6.15)$$

et, en posant :

$$W = J\phi + f(r) \quad (J = \text{Const.}), \quad (6.16)$$

l'équation (6.14) donnera :

$$f(r) = \int \left( A^2 + \frac{2B}{r} + \frac{C}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}} dr, \quad (6.17)$$

avec :

$$A = \frac{1}{c} \sqrt{E^2 - m_0^2 c^4}, \quad B = \frac{A\epsilon e^2}{c}, \quad C = \frac{e^4}{c^2} - J^2. \quad (6.18)$$

Dans (6.17), le discriminant est positif :

$$\Delta' = B^2 - A^2 C = A^2 J^2 \geq 0 \quad (6.19)$$

et les racines sont donc réelles :

$$\frac{1}{r} = \frac{A\left(\frac{\epsilon e^2}{c} \pm J\right)}{J^2 - \frac{e^4}{c^2}} \quad (\epsilon = \pm 1) \quad (6.20)$$

Nous supposons désormais que  $J \neq 0$  et comme nous sommes à la limite d'un problème quantique, nous aurons :

$$J \approx \hbar \rightarrow J \approx 137 \frac{e^2}{c} \gg \frac{e^2}{c}. \quad (6.21)$$

Après cette approximation, qui ne s'impose pas mais qui est commode pour l'exposé, nous écrivons la racine positive réelle dans (6.20) sous la forme :

$$\frac{1}{r^*} = \frac{A}{J} \rightarrow r^* = \frac{Jc}{\sqrt{E^2 - m_0^2 c^4}} \quad (6.22)$$

La trajectoire sera donnée par (6.16) et (6.17). Elle s'écrira :

$$\frac{\partial W}{\partial J} = \phi_0 \rightarrow \phi - \phi_0 = J \int_{r^*}^r \frac{-1}{\left(A^2 + \frac{2B}{r} + \frac{C}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} r^2} dr \quad (6.23)$$

En prenant  $\phi_0 = 0$  et en restant à la même approximation qu'en (6.22), l'équation de la trajectoire devient :

$$\frac{1}{r} = \frac{e^2 \sqrt{E^2 - m_0^2 c^4}}{J^2 c^2} \left( \epsilon + \frac{Jc}{e^2} \cos \phi \right) \quad (\epsilon = \pm 1). \quad (6.24)$$

C'est une *hyperbole*, puisqu'en vertu de (6.21), son excentricité est supérieure à l'unité :

$$\frac{Jc}{e^2} > 1. \quad (6.25)$$

Il n'y a donc pas d'états liés, comme on l'a vu d'avance, mais il ne faut pas oublier qu'il y a *deux types de trajectoires possibles*, selon le signe de  $\epsilon$ , qui correspondent respectivement aux deux équations (6.9) que nous avons tirées de (6.8) par factorisation. En effet :

- Si  $\epsilon = +1$ , la trajectoire tourne sa *concavité vers le champ central* et le mouvement est du type *attractif*.
- Si  $\epsilon = -1$ , la trajectoire tourne sa *convexité vers le champ central* et le mouvement est donc *répulsif*.

Et nous voyons qu'en accord avec le traitement quantique, les deux cas sont possibles *quelles que soient les charges respectives de la particule et du champ*.

Il est intéressant de comparer nos résultats avec le cas habituel d'un électron relativiste dans un potentiel coulombien : nous reprendrons donc l'équation classique (6.10) en y introduisant (6.15) et (6.16) d'où une intégrale qui a la même forme que (6.17) et que nous écrivons :

$$f(r) = \int \left( A^2 + \frac{2B'}{r} + \frac{C}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}} dr \quad (6.26)$$

avec les constantes :

$$A = \frac{1}{c} \sqrt{E^2 - m_0^2 c^4}, \quad B' = \frac{E \epsilon e^2}{c^2}, \quad C = \frac{e^4}{c^2} - J^2. \quad (6.27)$$

Nous nous plaçons ici dans le *cas diffusant* ( $E \geq m_0 c^2$ ) et on voit, en comparant avec (6.18), que le seul coefficient différent est B, où le facteur A qui figurait dans l'expression (6.18) de B est remplacé ici par  $\frac{E}{c}$ , ce qui veut dire que les deux cas se rejoindront à la limite  $E \gg m_0 c^2$ . Mais il faut souligner que, dans le cas précédent, la condition (6.13) :  $E \geq m_0 c^2$  était nécessaire, tandis qu'ici, dans le cas classique, ce n'est que l'une des possibilités, puisque nous pourrions avoir aussi  $E < m_0 c^2$ , ce qui correspondrait à des trajectoires elliptiques (états liés).

En reprenant le calcul précédent avec les valeurs (6.27) des constantes, nous trouverons les trajectoires :

$$\frac{1}{r} = \frac{e^2 E}{J^2 c^2} \left( \epsilon + c \frac{\sqrt{(E^2 - m_0^2 c^4) J^2 + m_0^2 c^2 e^4}}{E e^2} \cos \phi \right) \quad (6.28)$$

Cette formule, qui n'est valable que pour  $E > m_0 c^2$ , ne diffère de la formule classique que par l'absence du facteur de précession dans l'argument du cosinus, que nous négligeons en vertu de (6.21) et de l'approximation que nous avons faite précédemment (ce qui revenait en fait à remplacer C par  $-J^2$ ). Par contre cette approximation ne serait pas valable sous la racine qui figure dans l'expression de l'excentricité, sauf si  $E \gg m_0 c^2$ , limite à laquelle les expressions (6.24) et (6.28) se rejoignent.

Mais le cas intéressant est celui où  $E - m_0 c^2$  est petit. On voit en effet que l'excentricité de l'hyperbole classique dépend de E et que :

$$c \frac{\sqrt{(E^2 - m_0^2 c^4) J^2 + m_0^2 c^4}}{E e^2} \rightarrow 1 \quad \text{si } E \rightarrow m_0 c^2. \quad (6.29)$$

La trajectoire classique se referme donc et devient *parabolique* quand  $E \rightarrow m_0 c^2$ .

Au contraire, l'excentricité de l'hyperbole (6.24) ne dépend pas de l'énergie. Donc les angles des asymptotes ne changent pas. En revanche

$$\frac{1}{p} = \frac{e^2 \sqrt{E^2 - m_0^2 c^4}}{J^2 c^2} \rightarrow 0 \quad \text{si } E \rightarrow m_0 c^2. \quad (6.30)$$

et le paramètre tend vers l'infini, tandis qu'on voit sur (6.28) que lorsque  $E \rightarrow m_0 c^2$ , le paramètre tend vers une valeur finie dans le cas classique.

On voit qu'aux faibles énergies les deux comportements sont différents et devraient pouvoir se reconnaître expérimentalement, à condition d'être capable de préparer un électron dans cet état contraint étrange qui est décrit par le champ de Majorana.

## 7. Comment observer un électron de Majorana ?

Nous avons vu qu'à l'approximation de l'optique géométrique, dans un champ coulombien, l'électron de Majorana se comporte *soit* comme une particule de charge négative, *soit* comme une particule de charge positive, mais qu'il se distingue d'un électron ou d'un positron puisque son mouvement n'est pas keplerien.

Mais ceci ne concerne encore que les trajectoires, c'est à dire les rayons de l'onde donnés par l'équation de Jacobi. Si nous introduisons dans (6.3) les expressions de l'action  $S$  ainsi trouvées, nous pourrions résoudre (6.3) et introduire  $a$  et  $b$  dans l'expression (6.1) de la fonction d'onde.

Nous verrons alors que, bien que les trajectoires semblent "choisir" leur état de charge (+ ou -), la fonction d'onde reste évidemment un état de superposition de deux ondes avec des *phases opposées*, c'est à dire des ondes qui sont conjuguées de charge. Voyons le d'un peu plus près sur des *ondes planes*.

Au lieu de (6.1) posons donc

$$\xi = a e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} + b e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (7.1)$$

où les spineurs  $a$  et  $b$  sont maintenant constants. Introduisons cette expression dans (3.1) avec  $V = A = 0$  et  $\theta$  défini par (4.2). Par un calcul analogue à celui du § 6, mais plus simple, nous trouverons :

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}, \quad (7.2)$$

$$\xi = a e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} - \frac{\hbar}{m_0 c} \left( \frac{\omega}{c} - \vec{s} \cdot \vec{k} \right) s_2 a^* e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (7.3)$$

C'est manifestement la superposition de deux ondes avec des énergies de signes contraires. Mais revenons maintenant à l'équation de Dirac, c'est à dire que nous reprenons le couple d'équations (3.1), (3.2) relié par (1.16), que nous particularisons par (4.2) pour plus de commodité. Donc ce n'est plus le champ de Majorana (3.1) à deux composantes que nous regardons, mais celui de Dirac avec la contrainte (1.14).

Autrement dit, c'est l'équation (2.7) avec la valeur (4.2) pour l'angle  $\theta$ , mais avec  $A_\mu = 0$ . Il nous faut donc calculer l'onde  $\psi$  à partir de (7.3) avec :

$$\eta = s_2 \xi^*, \quad \psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \xi + \eta \\ \xi - \eta \end{bmatrix}, \quad (7.4)$$

ceci en vertu de (1.8), (1.16) et (4.2).

Nous allons prendre, en outre, Oz pour direction de propagation de l'onde plane et nous écrirons :

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad \vec{k} = \{0, 0, k\}. \quad (7.5)$$

$a_1$  et  $a_2$  sont les composantes du spineur constant dans (7.3). On trouve alors que  $\psi$  est de la forme :

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + \psi_2), \quad (7.6)$$

avec :

$$\psi_1 = a_1 \begin{bmatrix} 1 + \frac{\hbar}{m_0 c} \left( \frac{\omega}{c} + k \right) \\ 0 \\ 1 - \frac{\hbar}{m_0 c} \left( \frac{\omega}{c} + k \right) \\ 0 \end{bmatrix} e^{i(\omega t - kz)} - i a_1^* \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + \frac{\hbar}{m_0 c} \left( \frac{\omega}{c} + k \right) \\ 0 \\ -[1 - \frac{\hbar}{m_0 c} \left( \frac{\omega}{c} + k \right)] \end{bmatrix} e^{-i(\omega t - kz)} \quad (7.7)$$

$$\psi_2 = a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + \frac{\hbar}{m_0 c} \left( \frac{\omega}{c} - k \right) \\ 0 \\ 1 - \frac{\hbar}{m_0 c} \left( \frac{\omega}{c} - k \right) \end{bmatrix} e^{i(\omega t - kz)} + i a_2^* \begin{bmatrix} 1 + \frac{\hbar}{m_0 c} \left( \frac{\omega}{c} - k \right) \\ 0 \\ -[1 - \frac{\hbar}{m_0 c} \left( \frac{\omega}{c} - k \right)] \\ 0 \end{bmatrix} e^{-i(\omega t - kz)} \quad (7.8)$$

On voit que  $\psi$  est une superposition arbitraire de deux ondes  $\psi_1$  et  $\psi_2$  (n'oublions pas que  $a_1$  et  $a_2$  sont des constantes quelconques) et que chacune des ondes  $\psi_1$  et  $\psi_2$  est elle-même la superposition de deux ondes qui ne dépendent plus que d'une seule constante ( $a_1$  ou  $a_2$ ), mais *qui diffèrent à la fois par le signe de l'énergie et de l'hélicité*. Cette hélicité est facile à définir puisque, ayant choisi Oz pour direction de propagation, la projection du spin dans cette direction est :

$$\sigma_3 = \begin{bmatrix} s_3 & 0 \\ 0 & s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

On voit donc que :

- 1)  $\psi_1$  est la superposition de deux ondes d'hélicité et de charge de même signe (respectivement + et - pour chacune des deux ondes).
- 2)  $\psi_2$  est la superposition de deux ondes qui sont chacune d'hélicité et de charge de signe contraire.

On observera que la *phase relative* des deux composantes de  $\psi_1$  ou  $\psi_2$ , c'est à dire la phase relative de  $a_{1,2}$  et de  $a_{1,2}^*$  n'a pas de sens physique, puisque nous disposions d'une phase arbitraire  $\theta$  dans (3.1) ou dans (2.7) et c'est elle qui se retrouve ici.

En particulier, aux *faibles énergies*, on aura :

$$|k| \ll \frac{\omega}{c}, \quad \frac{\omega}{c} = \frac{m_0 c}{\hbar} \quad (7.10)$$

Il restera donc en première approximation :

$$\psi_1 = \begin{bmatrix} a_1 e^{i(\omega t - kz)} \\ -i a_1^* e^{-i(\omega t - kz)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \psi_2 = \begin{bmatrix} i a_2 e^{-i(\omega t - kz)} \\ a_2^* e^{i(\omega t - kz)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7.11)$$

Il s'ensuit que si l'on parvenait à "faire vivre" suffisamment longtemps (c'est à dire sans annihilation) deux faisceaux parallèles et de même énergie, ainsi polarisés, d'électrons et de positrons, les couples qui se formeraient devraient avoir le comportement d'un électron de Majorana.

Notamment, un électron dans un tel état devrait, ainsi qu'on l'a vu au paragraphe précédent, se comporter dans un champ coulombien d'une manière très différente de celle d'un électron ou d'un positron ordinaire.

## 8. L'équation dans le cas magnétique

Nous avons vu en (1.11) l'équation générale d'un monopôle avec un terme de masse non linéaire invariant chirale (contrairement au terme linéaire  $m_0 c$  de l'équation de Dirac qui n'est pas invariant chirale). Mais nous avons déjà remarqué (fin § 3) que la condition de Majorana rétablit la conservation du magnétisme. Elle fournit donc un autre procédé pour obtenir un monopôle magnétique de masse non nulle. En effet, dire que l'équation (1.11) est invariante de jauge, c'est dire que l'ensemble de toutes ses solutions est invariant dans la transformation (1.3); mais, il peut se faire également qu'une équation ne soit pas invariante chirale, mais qu'elle possède un *sous-ensemble invariant* de solutions. Celles-ci pourront alors correspondre à des états magnétiques. L'invariance chirale étant l'invariance par rotation dans le plan



chiral  $\{\Omega_1, \Omega_2\}$ , donc par rapport aux rotations d'angle  $A$ , on pourra obtenir cette invariance de deux manières :

- la première manière consistera à introduire dans l'équation un terme de masse qui ne dépend que de la norme du vecteur  $\{\Omega_1, \Omega_2\}$ , ce que nous avons fait ;

- l'autre (et c'est la seule) consistera à ajouter au lagrangien du monopôle linéaire un terme de masse quelconque qui n'est pas nécessairement invariant chiral, mais en ne prenant, dans l'équation ainsi obtenue, que le sous-ensemble de solutions telles que :

$$\rho = (\Omega_1^2 + \Omega_2^2)^{1/2} = 0 \quad (8.1)$$

et qui obéissent donc à la condition généralisée de Majorana (1.17) que nous écrirons ici :

$$\Psi = e^{i\theta} \gamma_2 \psi^* = e^{i\theta} \psi_c \quad (8.2)$$

En fait, on pourra prendre  $\theta = 0$ , mais nous ne le ferons qu'après nous en être assurés. D'autre part, nous pourrions adopter n'importe quel terme de masse, mais nous nous contenterons ici du terme linéaire de l'équation de Dirac. Nous introduirons donc dans l'équation du monopôle sans masse (1.4), le terme de masse de l'équation (1.2), mais nous devons l'assortir de la condition (8.1) ou (8.2), ce que nous ferons grâce à un multiplicateur de Lagrange. Nous aurons donc le lagrangien suivant analogue à (2.5) avec une interaction magnétique :

$$L = \frac{1}{2} \bar{\Psi} \gamma_\mu [\partial_\mu] \Psi - \frac{g}{\hbar c} \bar{\Psi} \gamma_\mu \gamma_5 B_\mu \Psi - \frac{m_0 c}{\hbar} \bar{\psi} \psi + \frac{\lambda}{2} (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) \quad (8.3)$$

où  $\lambda$  est un paramètre indéterminé. En faisant varier  $\bar{\psi}$ , nous obtiendrons :

$$\gamma_\mu (\partial_\mu - \frac{g}{\hbar c} \gamma_5 B_\mu) \Psi - \frac{m_0 c}{\hbar} \psi + \lambda (\Omega_1 - i \Omega_2 \gamma_5) \Psi = 0 \quad (8.4)$$

qui ressemble à l'équation (1.11), avec un terme linéaire de masse et un facteur  $\lambda$  constant au lieu de  $m(\rho^2)$ . Or le terme en  $\lambda$  disparaît car nous devons encore faire varier  $L$  par rapport à  $\lambda$  pour imposer la condition 8.1, qui entraîne :

$$\Omega_1 = \Omega_2 = 0 \quad (8.5)$$

ce qui annule dans (8.4) le terme en  $\lambda$ . Il s'ensuit que le multiplicateur  $\lambda$  reste indéterminé, puisque qu'il ne figure pas dans les équations de Lagrange. Il en était de même dans le cas électrique. Introduisons donc dans (8.4) la condition (8.5), ou plutôt son équivalent (8.2). Nous obtiendrons l'équation cherchée, c. à d. l'équation

de Majorana, au facteur de phase  $e^{i\theta}$  près et avec une interaction magnétique au lieu de l'interaction électrique que nous avons dans (2.1) :

$$\gamma_\mu \partial_\mu - \frac{g}{\hbar c} \gamma_5 B_\mu \Psi - \frac{m_0 c}{\hbar} e^{i\theta} \gamma_2 \psi^* = 0 \quad (8.6)$$

C'est cette équation que nous allons étudier, mais en représentation de Weyl, (1.8), (1.16)

L'équation (8.6) se scinde alors en deux équations séparées, mais liées :

$$\begin{aligned} (\pi_0^+ + \pi^+ \cdot s) \xi - i m_0 c e^{i\theta} s_2 \xi^* &= 0 \\ (\pi_0^- - \pi^- \cdot s) \eta + i m_0 c e^{i\theta} s_2 \eta^* &= 0 \end{aligned} \quad (8.7)$$

On a posé ici :

$$\pi_0^+ = 1/c(i\hbar\partial/\partial t + gW) \quad , \quad \pi^+ = -i\hbar\nabla + g/c\mathbf{B} \quad (8.8)$$

$$\pi_0^- = 1/c(i\hbar\partial/\partial t - gW) \quad , \quad \pi^- = -i\hbar\nabla - g/c\mathbf{B} \quad (8.9)$$

**Notons que, dans le cas électrique, il n'y avait qu'un seul opérateur  $\{\pi_0, \pi\}$ , tandis qu'ici, il y en a deux : un gauche et un droit.**

Avant d'en venir à l'étude des équations (8.6) et (8.7), nous allons encore nous arrêter un instant sur l'équation (8.4). Rappelons que, sans le terme d'interaction, elle a été proposée depuis longtemps par H. Weyl sous une forme équivalente [20], [2].

Contrairement à l'équation de Dirac ordinaire, cette équation a la propriété de garder la même forme en relativité générale, qu'on l'exprime sous forme métrique (avec des coefficients de connexion  $\Gamma_{\mu\lambda\nu}$  dépendant des  $g_{\mu\nu}$  ou sous forme mixte (avec des coefficients de connexion  $\Gamma_{\mu\lambda\nu}$  définis indépendamment des  $g_{\mu\nu}$ ). D'autre part, l'équation (8.4), sans terme d'interaction et sans terme de masse linéaire :

$$\gamma_\mu \partial_\mu \Psi + \lambda(\Omega_1 - i\Omega_2 \gamma_5) \Psi = 0 \quad (8.10)$$

est un cas particulier de (1.11) sans champ et avec  $\lambda = m(\rho^2) = \text{Cnte}$ . Sous une forme équivalente, elle a été étudiée par Rodichev [27] et nous avons montré que le terme  $(\Omega_1 - i\Omega_2 \gamma_5) \psi$  correspond à une torsion de l'espace [2] qui dérive de l'invariant chirale  $\rho^2 = (\Omega_1^2 + \Omega_2^2)$  dans le lagrangien. Quand nous montrons que la condition de Majorana est équivalente à la condition (8.1), cela signifie en réalité que la condition de Majorana, annule la torsion de l'espace.

### 9. Sur quelques résultats concernant l'équation non linéaire

L'équation (2.15) appartient à une classe d'équations étudiées par A. Bachelot [28], [29], [30]. Celui-ci a résolu le problème de Cauchy global pour l'équation (8.10), avec des conditions initiales qui ne sont pas supposées petites, mais seulement telles que l'invariant chirale soit petit. Autrement dit, la solution de Bachelot est donnée au voisinage de la condition de Majorana ou, si l'on veut : dans le cas d'une faible torsion de l'espace. Or Bachelot, pour démontrer son théorème, l'a fait précéder d'un lemme qui, à lui seul, présente un grand intérêt. Ce lemme s'énonce ainsi :

Dans l'équation de Dirac sans terme d'interaction électromagnétique, mais avec un terme de masse  $M$  dépendant éventuellement de l'espace et du temps :

$$\gamma_\mu \partial_\mu \Psi + M\psi = 0, \quad (9.1)$$

si l'invariant chirale  $\rho = (\Omega_1^2 + \Omega_2^2)^{1/2}$  s'annule sur tout l'espace à un instant donné, il restera nul par la suite. Il est facile de montrer que ce lemme reste vrai dans le cas qui nous occupe et il peut donc s'énoncer :

Si l'invariant chirale  $\rho = (\Omega_1^2 + \Omega_2^2)^{1/2}$  (et donc la torsion de l'espace) s'annule à un instant donné dans l'équation avec interaction magnétique :

$$\gamma_\mu (\partial_\mu \Psi - \frac{g}{\hbar c} \gamma_5 B_\mu) \Psi - m_0 \frac{c}{\hbar} \psi = 0, \quad (9.2)$$

il restera nul par la suite. La démonstration est la même que celle de Bachelot et nous en profitons pour la reproduire ici. Bachelot s'appuie sur deux lois de conservation de courant :

$$\partial_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi = 0 \quad , \quad \partial_\mu \bar{\tilde{\psi}} \gamma_2 \gamma_4 \gamma_\mu \psi = 0 \quad , \quad (\tilde{\psi} = \psi \text{ transposé} ) \quad (9.3)$$

On reconnaît, dans la première loi, la conservation du courant de Dirac, qui se déduit aussi bien de l'équation (1.2) avec l'interaction électrique habituelle que de l'équation (9.2) avec l'interaction magnétique. La seconde loi est la conservation du courant croisé entre des états conjugués de charge. Bachelot l'a déduite de l'équation (9.1), mais elle reste vraie pour l'équation (9.2) avec l'interaction magnétique. Par contre, il faut souligner que cette seconde loi est fautive pour l'équation de Dirac habituelle (1.2) avec l'interaction électrique. On trouve, en effet, dans ce dernier cas :

$$\partial_\mu \tilde{\psi} \gamma_2 \gamma_4 \gamma_\mu \psi + i A_\mu \tilde{\psi} \gamma_2 \gamma_4 \gamma_\mu \psi = 0 \quad (9.4)$$

Cela étant, quand les deux lois (9.3) sont vraies, Bachelot se sert des lois de conservation qu'elles entraînent :

$$\int_{\mathbf{R}^3} |\psi|^2 dx = \text{Cnte} \quad , \quad \int_{\mathbf{R}^3} \tilde{\psi} \gamma_2 \psi dx = \text{Cnte} \quad (9.5)$$

pourvu, bien sûr, que les intégrales existent. Cette réserve doit être faite, parce que nous savons que, dans les interactions entre un monopôle magnétique et une charge électrique, il n'existe pas d'états liés [1], [2] et le résultat n'est donc pas général. Cette réserve étant faite, on tire de (9.5) :

$$\int_{\mathbf{R}^3} |\Psi - e^{i\theta} \gamma_2 \psi^*|^2 dx = 2 \int_{\mathbf{R}^3} \{ |\Psi|^2 - \Re e^{-i\theta} \tilde{\psi} \gamma_2 \psi^* \} dx = \text{Cnste} \quad (9.6)$$

Il s'ensuit que si la condition (8.1) ou les conditions équivalentes (8.2), (1.16) sont réalisées à un instant donné, elles le demeureront par la suite, ce qui démontre le lemme de Bachelot. On voit tout de suite que ce lemme permet, dans les cas où il s'applique, de beaucoup affaiblir la condition que nous avons introduite dans les équations (8.6) ou (8.7) sous la forme du multiplicateur de Lagrange qui figure dans (8.3), puisqu'au lieu d'une contrainte que nous devons supposer se maintenir au cours du temps, il suffit maintenant d'une condition initiale, car il suffit que la condition de Majorana soit satisfaite à un instant donné pour qu'elle se maintienne, en vertu des équations du mouvement : les états magnétiques de Majorana sont donc simplement des solutions particulières de l'équation de Dirac avec interaction magnétique.

Comme nous le verrons, les équations (8.6) et (8.7) que nous avons obtenues représentent un couple de monopôles magnétiques et, pour que ces monopôles puissent apparaître, nous savons maintenant qu'il suffira, dans certains cas, de satisfaire une condition initiale et non plus une contrainte permanente.

Nous montrerons que les équations (8.6) et (8.7) sont invariantes par rapport à la jauge chirale (1.3), ce qui veut dire que, si l'équation (9.2) n'est certes pas invariante, les solutions qui obéissent à la condition (8.1) ou (8.2) le sont. En somme, les équations (8.6) et (8.7) représenteront des classes particulières de solutions de l'équation de Dirac (les solutions "monopôle magnétique"), que nous obtiendrons, dès qu'une action extérieure convenable créera les conditions (8.1) ou (8.2), comme nous l'avons vu, à un seul instant.

Soulignons encore qu'en raison de (9.4), ce que nous venons de dire ne concerne que l'interaction magnétique et non pas l'interaction électrique. Il semble donc que si l'on parvient à créer expérimentalement les conditions (8.1) ou (8.2), c'est l'apparition de couples de monopôles qui sera favorisée. Signalons encore un autre résultat de Bachelot qui est au moins aussi intéressant que le précédent. Remarquons d'abord que le lemme dont nous venons de parler signifie un peu plus que ce que nous avons dit : en effet, d'après (9.6) non seulement l'invariant chirale  $\rho = (\Omega_1^2 + \Omega_2^2)^{1/2}$  reste nul s'il l'a été à un instant donné, mais de plus, il reste petit s'il l'a été à un instant donné. La valeur  $\rho = 0$  est donc stable. Or le second résultat auquel nous faisons allusion concerne le comportement asymptotique de l'invariant chirale. Bachelot montre, en

effet, qu'en vertu de l'équation (9.1), c. à d. en présence du seul terme de masse non linéaire, et pour des valeurs initiales de  $\rho$  suffisamment petites, la valeur  $\rho = 0$  est asymptotiquement stable :

$$\int_{\mathbf{R}^3} \Omega_1 dx \rightarrow 0 \quad , \quad \int_{\mathbf{R}^3} \Omega_2 dx \rightarrow 0 \quad , \quad t \rightarrow \infty \quad (9.7)$$

Donc, toujours dans l'hypothèse où ces intégrales existent, on aura :

$$\rho \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad t \rightarrow \infty \quad (9.8)$$

### 10. L'hypothèse d'une autre équation.

a) L'invariance de jauge. Introduisons les transformations (1.3) dans l'équation (8.6). L'équation devient :

$$\gamma_\mu [\partial_\mu \Psi - \frac{g}{\hbar c} \gamma_5 (B_\mu + i \partial_\mu \Phi)] e^{i \frac{g}{\hbar c} \gamma_5 \Phi} \Psi - m_0 c / \hbar e^{i \theta} \gamma_2 e^{-i \frac{g}{\hbar c} \gamma_5 \Phi} \psi^* = 0 \quad (10.1)$$

D'où l'on en tire, grâce aux règles d'anticommuation des  $\gamma$  :

$$\gamma_\mu (\partial_\mu \Psi - \frac{g}{\hbar c} \gamma_\mu (B_\mu) \Psi - m_0 c / \hbar e^{i \theta} e^{2i \frac{g}{\hbar c} \gamma_5 \Phi} \gamma_2 \psi^* = 0 \quad (10.2)$$

On retrouve le bon terme d'interaction avec les potentiels  $B_\mu$ , mais il subsiste un facteur de phase en  $e^{2ig/\hbar c \gamma_5 \Phi}$ . L'invariance de jauge chirale n'est donc pas manifeste, ainsi qu'il fallait s'y attendre. En effet, cette invariance serait manifeste dans des équations du type (1.11), dans lesquelles l'angle chirale  $A$  ne figure pas, mais ici, nous sommes partis, en fait, de l'équation (9.2) qui n'est pas invariante de jauge chirale et nous nous sommes contentés d'imposer l'une des conditions équivalentes (8.1), (8.2) ou (1.16) qui rend l'angle  $A$  non pas absent, mais indéterminé : il est donc naturel qu'il puisse figurer, mais sa valeur n'interviendra pas dans les calculs (puisque c'est l'angle polaire d'un vecteur nul). Par contre, on observera que, contrairement à ce qui se passait dans le cas électrique, la phase  $\theta$  n'intervient pas et nous pourrions donc l'éliminer. Au lieu de (8.1) et (1.16), nous écrirons donc :

$$\Psi = \gamma_2 \psi^* = \psi_c \quad , \quad \xi = i s_2 \eta^* \quad , \quad \eta = -i s_2 \xi^* \quad (10.3)$$

Et au lieu de (8.6) et (8.7) nous aurons respectivement :

$$\gamma_\mu (\partial_\mu - \frac{g}{\hbar c} \gamma_5 B_\mu) \Psi - m_0 \frac{c}{\hbar} \gamma_2 \psi^* = 0 \quad (10.4)$$

$$\begin{aligned} (\pi_0^+ + \pi^+ \cdot s)\xi - im_0cs_2\xi^* &= 0 \\ (\pi_0^- + \pi^- \cdot s)\eta + im_0cs_2\eta^* &= 0 \end{aligned} \quad (10.5)$$

a) En tenant compte de (1.8) et (1.6), la transformation de jauge (1.3) s'écrira, en termes de  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $W$  et  $B$  :

$$\xi \rightarrow e^{i\frac{q}{\hbar c}\Phi}\xi \quad , \quad \eta \rightarrow e^{i\frac{q}{\hbar c}\Phi}\eta \quad , \quad (10.6)$$

$$W \rightarrow W - 1/c\partial\Phi/\partial t \quad , \quad \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B} + \nabla\Phi \quad (10.7)$$

b) L'invariance CPT est triviale : elle découle immédiatement de l'invariance du lagrangien (8.3). c) La conservation du moment cinétique dans le cas coulombien : la conservation de l'intégrale du moment cinétique de Poincaré devrait être brisée par la présence d'un terme de masse linéaire (voir [1], [2], [3]). Mais ici, on vérifie qu'elle est assurée grâce à la condition (8.1). Il convient toutefois de remarquer que c'est l'équation (10.4) qui conserve le moment cinétique et donc, en représentation de Weyl, le système des deux équations (10.5) et non pas chacune des équations séparément. Notons qu'il en était de même dans le cas électrique.

### 11. L'approximation de l'optique géométrique.

Jusqu'à présent, tout paraissait satisfaisant, tant qu'il ne s'agissait que de lois de conservation, mais il serait souhaitable de pouvoir vérifier les qualités de l'équation en l'intégrant dans un cas connu comme l'interaction entre un monopôle et une charge électrique. Malheureusement, le problème est radicalement plus difficile que pour le monopôle de masse nulle parce que le système (10.5) est non linéaire, comme la condition (8.1). Nous allons, pour cela, nous contenter de l'approximation classique. Considérons le système (10.5) avec  $\pi^+$  et  $\pi^-$  définis en (8.8) et (8.9) en prenant  $W = 0$  comme dans le cas coulombien et en posant :

$$\xi = a \exp(-iS/\hbar) + b \exp(iS/\hbar) \quad , \quad \eta = -is_2\xi^* \quad (11.1)$$

Un calcul analogue à celui donné au § 6, donne une équation du type "Hamilton-Jacobi" :

$$\begin{aligned} [(\frac{\partial S}{\partial t})^2 \frac{1}{c^2} - (\nabla S + \frac{g\mathbf{B}}{c})^2 - m_0^2c^2] [(\frac{\partial S}{\partial t})^2 \frac{1}{c^2} - (\nabla S - \frac{g\mathbf{B}}{c})^2 - m_0^2c^2] \\ = 4m_0^2g^2B^2 \end{aligned} \quad (11.2)$$

C'est la même équation que dans le cas électrique, mais la signification de  $B$  est différente. Ainsi, dans le cas coulombien, nous avons [1], [2], [3] :

$$W = 0 \quad , \quad B_x = \frac{e}{r} \frac{yz}{x^2 + y^2} \quad , \quad B_x = -\frac{e}{r} \frac{xz}{x^2 + y^2} \quad , \quad B_z = 0 \quad (11.3)$$

avec le champ électrique défini par :

$$\mathbf{E} = \text{rot } \mathbf{B} = e\mathbf{r}/r^3 \quad (11.4)$$

Cela étant, il faut reconnaître que (11.2) n'est pas l'équation classique d'un monopôle magnétique en présence d'une charge électrique, qui s'écrirait :

$$\text{soit : } [(\partial S/\partial t)^2/c^2 - (\nabla S + g\mathbf{B}/c)^2 - m_0^2 c^2] = 0 \quad (11.5)$$

$$\text{soit : } [(\partial S/\partial t)^2/c^2 - (\nabla S - g\mathbf{B}/c)^2 - m_0^2 c^2] = 0 \quad (11.6)$$

suivant le signe de la charge magnétique. La présence simultanée, dans (11.2), des deux parenthèses  $(\nabla S + g\mathbf{B}/c)$  et  $(\nabla S - g\mathbf{B}/c)$ , suggère que l'équation contient un couple de monopôles de signes contraires et on observera que, lorsqu'on s'éloigne du centre de la charge électrique, on a  $B \rightarrow 0$  et l'équation (11.2) se sépare en ses deux composantes (11.5) et (11.6). Donc, asymptotiquement, nous avons bien un couple de monopôles classiques. C'est, en somme, l'approximation zéro. L'approximation du premier ordre (plus près du centre) pourra s'écrire :

$$[(\partial S/\partial t)^2/c^2 - (\nabla S + g\mathbf{B}/c)^2 - m_0^2 c^2] = 2m_0 g|B| \quad (11.7)$$

$$[(\partial S/\partial t)^2/c^2 - (\nabla S - g\mathbf{B}/c)^2 - m_0^2 c^2] = -2m_0 g|\mathbf{B}| \quad (11.8)$$

Si nous posons, dans l'une de ces deux équations :

$$p = \nabla S = mdr/dt \quad , \quad \lambda = egc/\epsilon \quad (\epsilon = \text{énergie du système}) \quad (11.9)$$

nous obtiendrons l'équation suivante (au signe près devant  $g$ ) :

$$d^2 r/dt^2 = -\lambda/r^3 \cdot dr/dt \times r - m_0 g \nabla |\mathbf{B}| \quad (11.10)$$

On reconnaît bien le premier terme de (11.10) qui est celui de l'équation de Poincaré [31], qui représente l'interaction entre une charge électrique et une charge magnétique classiques. Rappelons que c'est cette équation que nous avons obtenue [1], à la limite de l'optique géométrique, avec l'équation du monopôle magnétique sans masse que nous avons étudiée jusqu'ici à partir de l'invariance de jauge chirale. On voit que, dans le cas présent, il apparaît un terme pour le moins étrange qui appelle à la prudence au sujet de ce "monopôle de Majorana" dont il nous a cependant paru intéressant de montrer quelques propriétés.

Il faut encore ajouter que l'équation de Poincaré ne doit pas sa valeur à la seule célébrité de son auteur, car elle est vérifiée par l'expérience. En effet, cette équation est celle du mouvement d'un faisceau de rayons cathodiques perturbé par la présence

de l'un des pôles d'un aimant linéaire (donc, pratiquement, d'un monopôle!). C'est précisément pour rendre compte du phénomène ainsi obtenu expérimentalement par Birkeland, que Poincaré s'est posé le problème et à donné cette équation, qui s'accorde bien avec les faits [6], [31]. Il n'est donc pas question de rester indifférent à un désaccord avec l'équation de Poincaré. Néanmoins, il faut tout de même remarquer que le système (10.5) étudié ici est indissociable, ce qui signifie que, s'il représente quelque chose, ce n'est pas un monopôle mais une paire et que ceci pourrait (par influence mutuelle) expliquer la différence avec notre précédente équation, à l'approximation de l'optique géométrique, d'autant plus que les choses se rétablissent en s'éloignant du centre attractif.

## APPENDICE A

Nous allons établir les formules (4.6). Tout d'abord, on sait que, par définition de  $\Omega_l^m(-)$  et  $\Omega_l - 1^m(+)$ , on a :

$$\vec{J}^2 \Omega_l^m(-) = j(j+1) \Omega_l^m(-), \quad (\text{A.1})$$

$$\vec{J}^2 \Omega_{l-1}^m(+) = j(j+1) \Omega_{l-1}^m(+), \quad j = l - \frac{1}{2}$$

$$J_z \Omega_l^m(-) = u \Omega_l^m(-), \quad J_z \Omega_{l-1}^m(+) = u \Omega_{l-1}^m(+), \quad u = m - \frac{1}{2} \quad (\text{A.2})$$

avec :

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{s}, \quad \vec{L} = -i \vec{r} \times \vec{\nabla}, \quad \vec{s} = \frac{1}{2} \vec{s}, \quad (\text{A.3})$$

où  $\vec{s} = \{s_1, s_2, s_3\}$  sont les matrices de Pauli.

On vérifie facilement que l'opérateur :

$$\vec{s} \cdot \vec{n} = \frac{1}{r} \vec{s} \cdot \vec{r} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

commute avec  $J_{vec}$  :

$$[\vec{J}, \vec{s} \cdot \vec{n}] = 0 \quad (\text{A.5})$$

Donc  $\vec{s} \cdot \vec{n}$  transforme un  $\Omega$  appartenant au sous-espace des valeurs propres  $j, u$  de  $J^2$  et  $J_z$  en un élément du même sous-espace. On aura, par exemple :

$$\vec{s} \cdot \vec{n} \Omega_l^m(+) = A \Omega_l^m(+) + B \Omega_{l+1}^m(-) \quad (\text{A.6})$$



où les constantes A et B ne dépendent pas de m. Nous les calculerons en choisissant des valeurs particulières de m et des angles polaires :

$$m = l + 1, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \phi = 0. \quad (\text{A.7})$$

D'après (4.4), nous aurons alors :

$$\Omega_l^{l+1}(+) = \begin{bmatrix} Y_l^l(\frac{\pi}{2}, 0) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega_{l+1}^{l+1}(-) = \begin{bmatrix} \left(\frac{l}{2l+3}\right)^{\frac{1}{2}} Y_{l+1}^l(\frac{\pi}{2}, 0) \\ -\left(\frac{2l+2}{2l+3}\right)^{\frac{1}{2}} Y_{l+1}^{l+1}(\frac{\pi}{2}, 0) \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Mais d'après (4.5), on a d'autre part :

$$Y_{l+1}^l(\frac{\pi}{2}, 0), \quad \left(\frac{2l+2}{2l+3}\right)^{\frac{1}{2}} Y_{l+1}^{l+1}(\frac{\pi}{2}, 0) = -Y_l^l(\frac{\pi}{2}, 0), \quad (\text{A.9})$$

et d'après (A.4) on a :

$$\vec{s} \cdot \vec{n}(\frac{\pi}{2}, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

Il suffit d'introduire (A.8), (A.9) et (A.10) dans (A.7) pour trouver :

$$A = 0, \quad B = 1, \quad (\text{A.11})$$

ce qui démontre la première relation (4.6). La seconde est évidente parce que :

$$(\vec{s} \cdot \vec{n})^2 = I, \quad (\text{A.12})$$

et les deux dernières également, à condition de se rappeler qu'en vertu de (4.5), on a :

$$Y_l^{m*}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_l^{-m} \quad (\text{A.13})$$

## APPENDICE B

Pour démontrer (4.12), il suffit de remarquer que, dans (A.3),  $\vec{L}$  et  $\vec{s}$  commutent, si bien qu'en vertu de (4.4) et (A.1), on a :

$$\vec{J}^2 \Omega_l^m(\pm) = j(j+1) \Omega_l^m(\pm), \quad \vec{L}^2 \Omega_l^m(\pm) = l(l+1) \Omega_l^m(\pm), \quad (\text{B.1})$$

$$\vec{S}^2 \Omega_l^m(\pm) = s(s+1) \Omega_l^m(\pm) = \frac{3}{4} \Omega_l^m(\pm).$$

Or, d'après (A.3), on a :

$$(\vec{L} + \vec{S})^2 \Omega_l^m(\pm) = (L^2 + S^2 + 2\vec{L} \cdot \vec{S}) \Omega_l^m(\pm) = (L^2 + S^2 + \vec{L} \cdot \vec{S}) \Omega_l^m(\pm) \quad (\text{B.2})$$

et d'après (B.1), on aura donc :

$$j(j+1) \Omega_l^m(\pm) = [l(l+1) + \frac{3}{4} + \vec{L} \cdot \vec{s}] \Omega_l^m(\pm),$$

d'où les relations (4.12).

## Références

- [1] G. Lochak, Ann. Fond. L. de Br., **8**, 345, 1983 ; **9**, 1, 1984
- [2] G. Lochak, Int. J. Theor. Phys. **24**, 1019, 1985
- [3] G. Lochak, Proceedings of the 4-th International Seminar on the Mathematical Theory of Dynamical Systems and Micro-physics, Udine (Italy), to be published, 1985
- [4] G. Lochak, Ann. Fond. L. de Br., **12**, 135, 1987
- [5] G. Lochak, Ann. Fond. L. de Br., **17**, 203, 1992
- [6] G. Lochak, The symmetry between electricity and magnetism in advanced electromagnetism, T.W. Barrett and D.M. Grimes Editors World Scientific, Singapore 1995
- [7] G. Lochak, Ann. Fond. L. de Br., **22**, 1, 187, 1997
- [8] P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A **133**, 60, 1931
- [9] N. Cabibbo, G. Ferrari, Nuovo. Cim. **23**, 1147, 1962
- [10] R. Mignani, E. Recami, Nuovo Cim. **30A**, 533, 1975
- [11] E. Recami, R. Mignani, Phys. Letters, **62B**, 41, 1976
- [12] E. Majorana, Nuovo Cim. **14**, 171, 1937
- [13] H. Jehle, Phys. Rev. **75**, 1609, 1949
- [14] C.W. Kilmister, Phys. Rev. **76**, 568, 1949
- [15] J. Serpe, Phys. Rev. **76**, 1538, 1949
- [16] J. Serpe, Physica, **18**, 295, 1952
- [17] J.A. Mc Lennan Jr, Phys. Rev. **106**, 821, 1957
- [18] K.M. Case, Phys. Rev. **107**, 307, 1957
- [19] H.H. v. Borzeszkowski, H.J. Treder, Found. of Phys. **15**, 193, 1985
- [20] H. Weyl, Phys. Rev. **77**, 699, 1950
- [21] L. de Broglie, L'électron magnétique, Hermann, Paris, 1934
- [22] H.A. Kramers, Quantum Mechanics, Dover, N.Y., 1964
- [23] D. Bohm, Quantum Theory, Prentice Hall, London, 1960
- [24] A.I. Akhiezer, V.B. Berestetski, Quantum Electrodynamics, Interscience, N.Y. 1965
- [25] E.L. Ince, Ordinary Differential Equations, Dover
- [26] E.T. Whittaker, G.N. Watson, A Course of Modern Analysis, Cambridge University Press, 1958
- [27] V.I. Rodichev, Soviet Phys. JETP, **13**, 1029, 1961.

- [28] A. Bachelot, *Global Existence of Large Amplitude Solutions to Nonlinear Wave Equations in Minkowski Space*, Preprint N° 8802 UER de Math Bordeaux I, 1988.
- [29] A. Bachelot, Mémoire d'Habilitation, Université de Bordeaux I, 1988.
- [30] A. Bachelot, *Portugaliæ Mathematica*, **46** (Fasc. Suppl.), 455, 1989.
- [31] H. Poincaré, *Comptes rendus*, **123**, 530, 1896.